第 3 节 空间向量的应用：求距离（★★★）

内容提要

本节归纳用空间向量求距离的有关问题，常见的有下面两类：

1．求点到直线的距离：如图 1，设 P 为直线 l 外一点，点 A 在直线 l 上，$\boldsymbol{u}$ 是直线 l 的单位方向向量，则点 P 到直线 l 的距离 $PQ=\sqrt{\overrightarrow{AP}^2-(\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{u})^2}$.

注：当线线平行时，两直线间的距离等于其中一条直线上任意一点到另一直线的距离.

2．求点到平面的距离：如图 2，P 为平面 α 外一点，A 为平面 α 上任意一点，$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的一个法向量，则点 P 到平面 α 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

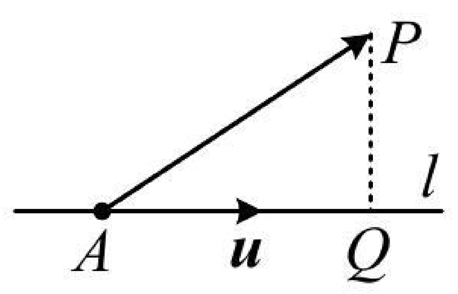


图1

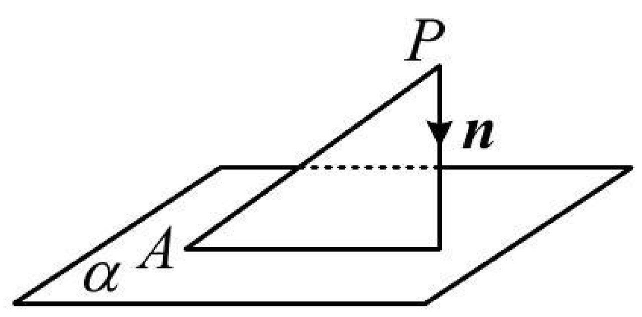


图2

注：当线面平行或面面平行时，直线到平面的距离，平行平面间的距离都可按点到平面的距离来算.

典型例题

【例题】（多选）在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为线段 DD_1 的中点，F 为线段 BB_1 的中点，则下列说法中正确的是（　）

（A）点 A_1 到直线 B_1E 的距离是 $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

（B）直线 FC_1 到直线 AE 的距离是 $\dfrac{\sqrt{30}}{5}$

（C）点 A_1 到平面 AB_1E 的距离是 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

（D）直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离是 $\dfrac{1}{3}$

解析： 涉及的距离都可直接代内容提要公式算，故建系处理，

如图建系，则 $A(0,0,0)$，$A_1(0,0,1)$，$B_1(1,0,1)$，$E(0,1,\frac{1}{2})$，$F(1,0,\frac{1}{2})$，

A 项，$\overrightarrow{A_1B_1}=(1,0,0)$，$\overrightarrow{B_1E}=(-1,1,-\frac{1}{2})$，直线 B_1E 的一个单位方向向量为 $\boldsymbol{u}=\dfrac{\overrightarrow{B_1E}}{|\overrightarrow{B_1E}|}=(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3})$，

由内容提要 1 的公式，点 A_1 到直线 B_1E 的距离为 $\sqrt{\overrightarrow{A_1B_1}^2-(\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\boldsymbol{u})^2}=\sqrt{1-(-\frac{2}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$，故 A 项正确；

B 项，观察发现 $FC_1 // AE$，故两直线的距离可转化为点到直线的距离来算，点不妨取 F，

$\overrightarrow{AF}=(1,0,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,\frac{1}{2})$，所以直线 AE 的一个单位方向向量 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\overrightarrow{AE}}{|\overrightarrow{AE}|}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\overrightarrow{AE}=(0,\frac{2\sqrt{5}}{5},\frac{\sqrt{5}}{5})$，

从而点 F 到直线 AE 的距离为 $\sqrt{\overrightarrow{AF}^2-(\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{v})^2}=\sqrt{\frac{5}{4}-(\frac{\sqrt{5}}{10})^2}=\frac{\sqrt{30}}{5}$，故 B 项正确；

C 项，算点到平面的距离，可代内容提要第 2 点的公式，先求平面 AB_1E 的法向量，

$\overrightarrow{AB_1}=(1,0,1)$，$\overrightarrow{AE}=(0,1,\frac{1}{2})$，设平面 AB_1E 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AB_1}=x+z=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=y+\frac{1}{2}z=0\end{cases}$，

令 $x=2$，则 $\begin{cases}y=1\\ z=-2\end{cases}$，所以 $\boldsymbol{n}=(2,1,-2)$ 是平面 AB_1E 的一个法向量，

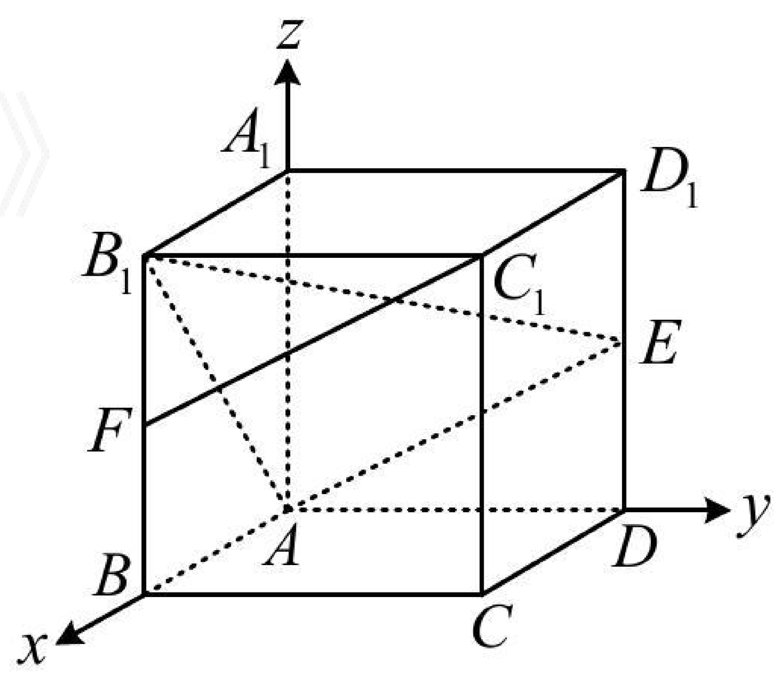
又 $\overrightarrow{AA_1}=(0,0,1)$，所以点 A_1 到平面 AB_1E 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{2}{3}$，故 C 项错误；

D 项，由 $FC_1 // AE$ 可知 $FC_1 //$ 平面 AB_1E，故线面距离可按点到平面的距离来算，

前面已求得 $\overrightarrow{AF}=(1,0,\frac{1}{2})$，平面 AB_1E 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,1,-2)$，

所以点 F 到平面 AB_1E 的距离为 $\frac{|\overrightarrow{AF}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{3}$，从而直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离为 $\frac{1}{3}$，故 D 项正确.

答案：ABD



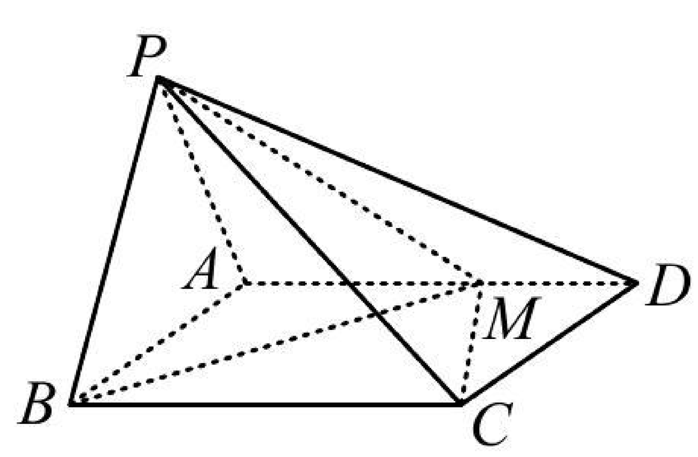
【总结】向量法计算空间距离，熟悉有关公式即可，都是流程化的操作，所以本节只举一道例题.

强化训练

1.（2023•山西模拟•★★★）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PAB\perp$ 平面 $ABCD$，底面 $ABCD$ 为矩形，$PA=PB=\sqrt{5}$，$AB=2$，$AD=3$，M 是棱 AD 上一点，且 $AM=2MD$.

（1）求点 B 到直线 PM 的距离；

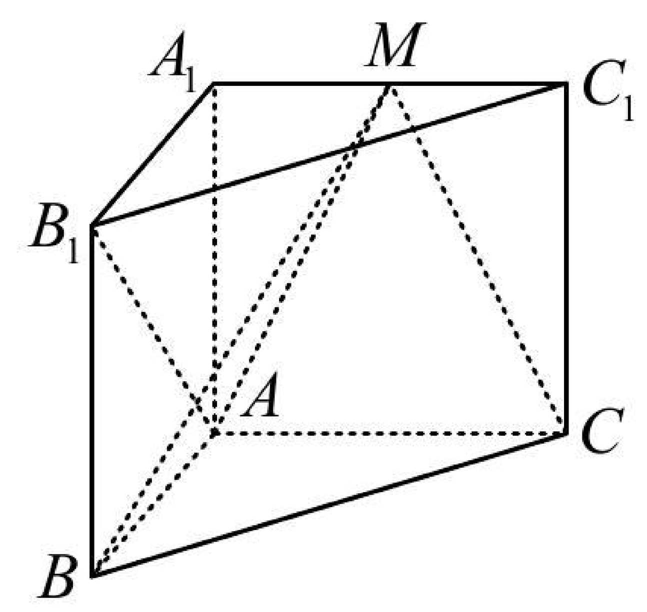
（2）求平面 PMB 与平面 PMC 的夹角余弦值.



2.（2022•滕州模拟•★★★）如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$AB\perp AC$，$AB=AC=AA_1=1$，M 为线段 A_1C_1 上一点.

（1）求证：$BM\perp AB_1$；

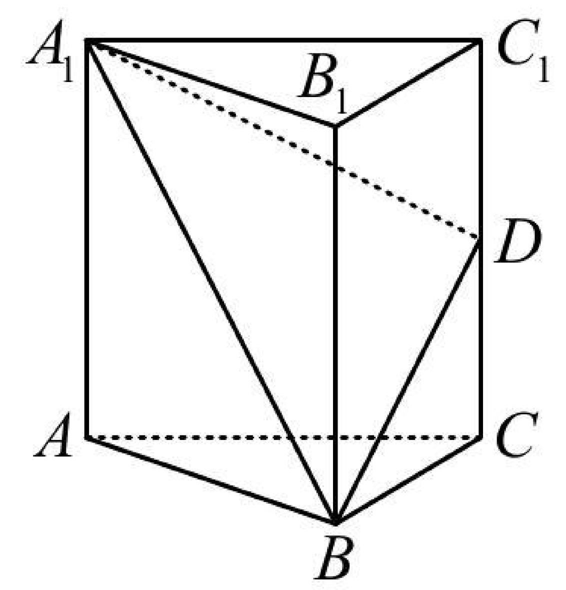
（2）若直线 AB_1 与平面 BCM 所成的角为 45°，求点 A_1 到平面 BCM 的距离.



3.（2023•乾县模拟•★★★）如图，直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AC=BC=AA_1$，D 为 CC_1 的中点.

（1）证明：平面 $A_1BD\perp$ 平面 ABB_1A_1；

（2）若 $\angle ACB=90^{\circ}$，$AB=2$，求点 B_1 到平面 A_1BD 的距离.



4．（2023 • 泸县模拟 • ★★★）如图，在多面体 $ABCDE$ 中，ΔABC ，ΔBCD ，ΔCDE 都是边长为 2 的正三角形，平面 $ABC\perp$平面 BCD，平面 $CDE\perp$平面 BCD.

（1）求证：$AE // BD$；

（2）求点 B 到平面 ACE 的距离.

5．（2023 • 全国甲卷 • ★★★★）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1=2$，$A_1C\perp$底面 ABC，$\angle ACB=90^{\circ}$，A_1 到平面 BCC_1B_1 的距离为 1.

（1）证明：$AC=A_1C$；

（2）若直线 AA_1 与 BB_1 的距离为 2，求 AB_1 与平面 BCC_1B_1 所成角的正弦值.